



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



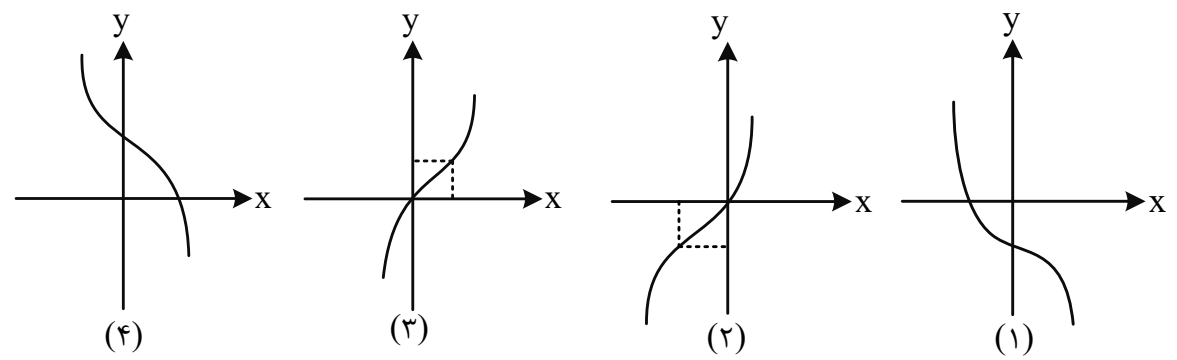
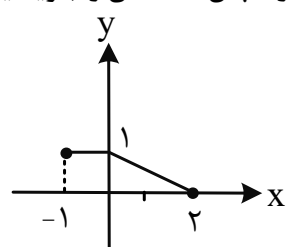
دفترچه سؤال

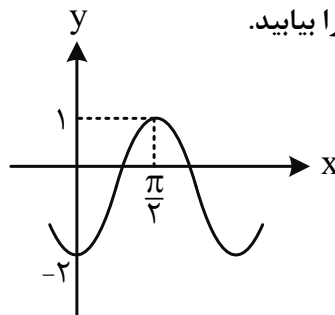
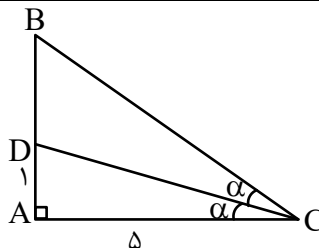
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	حسابان (۲)	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		
نمره			
۱	۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ با فرض $k > 0$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.</p> <p>ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر صفر است.</p> <p>پ) تابع $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3}$ دارای دو خط مجانب قائم است.</p>	
۲	۰/۷۵	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $2 - ax + x^2$ بر $x - a$ برابر است.</p> <p>ب) خط به معادله مجانب افقی تابع $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ است.</p> <p>پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2)$ برابر است.</p>	
۳	۰/۵	<p>نمودار توابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ و $g(x) = -x^3 + 2$ را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید و سپس شماره مربوط به آن‌ها را در پاسخ برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است).</p> 	
۴	۱/۵	<p>نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -f(\frac{1-x}{2})$ را رسم کنید و سپس دامنه آن را بنویسید.</p> 	
۵	۱	<p>نقطه $A(1, 2)$ روی تابع $y = f(x)$ با نقطه $A'(2, 1)$ روی تابع $g(x) = af(bx)$ متناظر است. مقادیر a و b را بیابید. (با ذکر دلیل)</p>	
صفحه ۱ از ۳			

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سوالات (پاسخ برگ دارد)			
۶	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و تعیین کنید که در چه بازه یا بازه‌هایی صعودی و در چه بازه یا بازه‌هایی نزولی است؟	۱/۵		
۷	چند جمله‌ای $f(x) = x^3 + mx^2 - 2x + 3$ را در نظر بگیرید. مقدار m را به گونه‌ای بیابید که چند جمله‌ای $g(x) = f(2x-1)$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد.	۱		
۸	ابتدا مقدار a را طوری به دست آورید که چند جمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^2 - a$ بر $x-a$ بخش پذیر باشد، سپس $f(x)$ را بر حسب عامل $x-2$ تجزیه کنید.	۱		
۹	دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(ax) + 3$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ است. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع f را به دست آورید.	۱		
۱۰	بخشی از نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a ، $ b $ و c را بیابید.	۱/۲۵		
۱۱	اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ و $\tan \alpha = 2m + 1$ باشد، حدود m را بیابید.	۱		
۱۲	در مثلث قائم الزاویه شکل مقابل، طول پاره خط BD را به دست آورید.	۱/۵		
۱۳	معادله $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱/۲۵		
۱۴	حاصل حدهای زیر را بیابید.	۲	الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 4}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 1)$ ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2}$	
۱۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$ را در نزدیکی مجانب قائم آن، با ذکر دلیل رسم کنید.	۱/۵		
صفحه ۲ از ۳				

تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴		رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	سوالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: حسابان ۲	
نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع:		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۳
گروه آموزشی ماز			آزمون شبهه‌ساز امتحان نهایی		
نمره	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)				ردیف
۱	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{ax^2+bx+4} = +\infty$ باشد.				۱۶
۱	نقطه برخورد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{6x+1}{2x-4}$ را بیابید.				۱۷
۰/۵	نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{-1, -1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.				۱۸
۲۰	موفق باشید.				
	صفحه ۳ از ۳				



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ حسابان (۲)

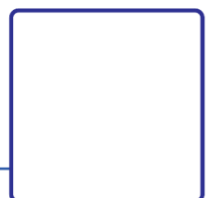
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) (ب) (پ)	۰/۷۵
۲	الف) (ب) (پ)	۰/۷۵
۳		۰/۵
۴		۱/۵
۵		۱



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۶		۱/۵
۷		۱
۸		۱
۹		۱
۱۰		۱/۲۵



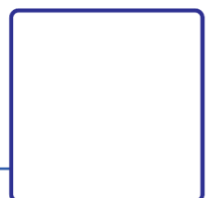
ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۱
۱۲		۱/۵
۱۳		۱/۲۵
۱۴	الف) ب) پ) ت)	۲



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۵		۱/۵
۱۶		۱
۱۷		۱
۱۸		۰/۵
	موفق باشید.	۲۰





پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

حسین شفیع‌زاده - مهرداد کیوان

درس

حسابان (۲)

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

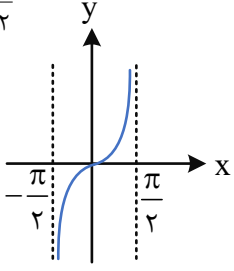
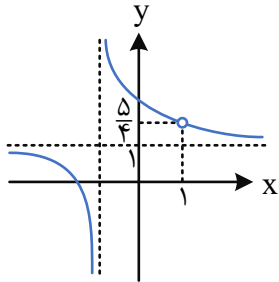
تیم اجرایی و تولید آزمون

مرضیه بنیانی	یگانه پوراابراهیم	زهره جعفری
محدثه شیخعلی	محدثه عربگری	ساره محمدعلی نسب

سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: حسابان ۲		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	ساعت شروع:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>مصحح شو </p> <p>الف) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۹) ب) درست (۰.۲۵) (صفحه ۵۳) پ) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۵۶)</p> <p>بررسی دقیق تر: </p> <p>ب) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$، مشخص است که $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$</p>  <p>بنابراین:</p> $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ <p>پ) $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+4}{x+3}$</p> <p>ع! هموگرافیک خودمون شد که، اما یه فرقی داره، اینکه $x=1$ هم تو دامنه اش نیست. (یواشکی $x-1$ رو خط زدیم، ولی حواسمون هست که تو مخرج بود!)</p>  <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه </p> <p>مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۱ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	۰/۷۵
۲	<p>مصحح شو </p> <p>الف) ۲ (۰.۲۵) (صفحه ۱۹) ب) $y=0$ (۰.۲۵) (صفحه ۶۸) پ) $-\infty$ (۰.۲۵) (صفحه ۶۹)</p> <p>بررسی دقیق تر: </p> <p>الف) باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $ax+b$ می شود: $f(-\frac{b}{a})$</p> <p>بنابراین اگر $f(x) = x^2 - ax + 2$، $f(a) = a^2 - a^2 + 2 = 2$</p> <p>ب) برای محاسبه مجانب افقی، باید حد تابع را زمانی که $x \rightarrow \infty$ حساب کنیم.</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ <p>$y=0$ (محور x ها) مجانب افقی تابع است.</p>	۰/۷۵

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه

مصّحح شو

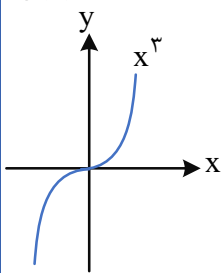
(صفحه ۱۴)

f(x) شماره ۳ (۰.۲۵) g(x) شماره ۴ (۰.۲۵)

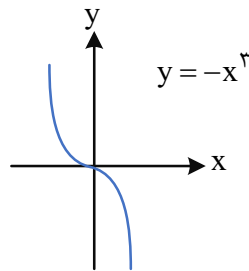
بررسی دقیق‌تر:

به کمک انتقال، نمودار توابع g(x) و f(x) را رسم می‌کنیم.

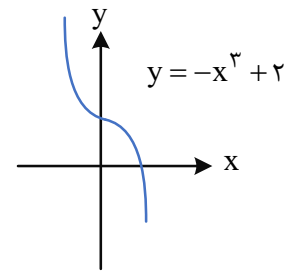
$$g(x) = -x^3 + 2$$



قرینه نسبت به محور Xها



دو واحد به بالا

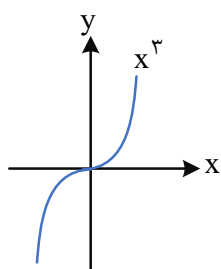


پس g(x) همیشه نمودار شماره ۴

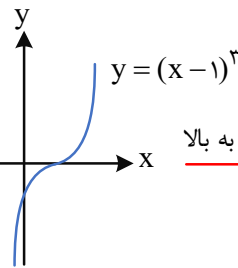
۳

۰/۵

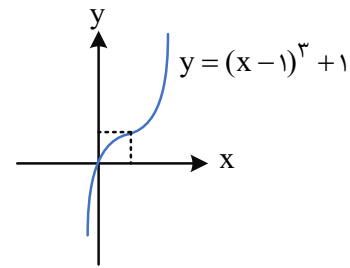
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$



یک واحد به راست



یک واحد به بالا



پس f(x) همیشه نمودار شماره ۳

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

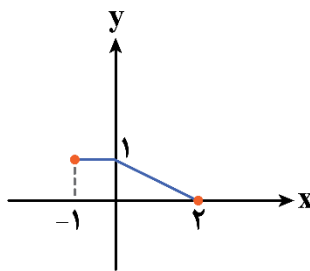
نقشه نهایی:

اگر سوال، رسم توابع به کمک انتقال بود، تمام مراحل رو رسم کنید که نمره‌ای رو این وسط از دست ندین!

مصّحح شو

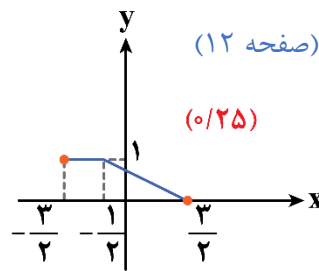
با انجام مراحل، تابع g را رسم می‌کنیم: (صفحه ۱۲)

(۰/۲۵)



f(x)

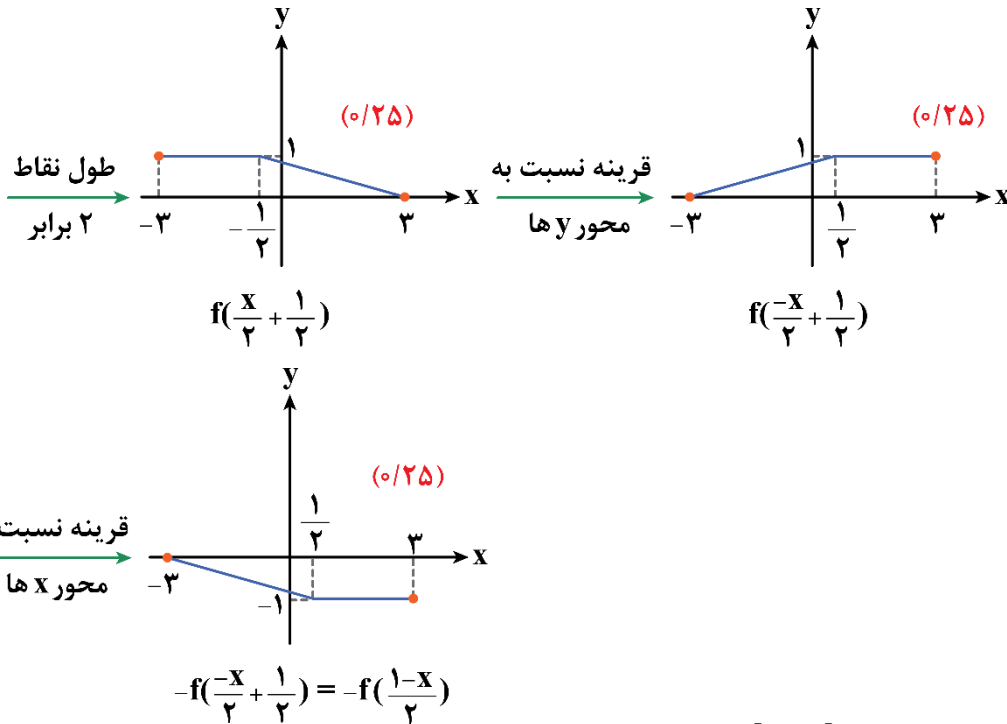
۱/۴ واحد به سمت چپ




f(x + 1/4)

۱/۵

۴



دامنه تابع مورد نظر برابر $[-3, 3]$ است.
 $(0, 25)$ $(0, 25)$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه 

تبدیل و انتقال نمودار

توضیحات و نحوه رسم	نمودار جدید ($a, k > 0$)
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	$f(x+a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	$f(x-a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	$f(x)+a$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	$f(x)-a$
نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	$f(-x)$
نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$-f(x)$

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ)
$f(kx)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.
$kf(x)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$ y = f(x)$	ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۵ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

نقشه نهایی:

تو این سوالا، حتی اگر صورت سوال چیزی نگفته، حتماً نمودار را مرحله به مرحله همراه با انتقال رسم کنین! اینجا هر نوشته شما ارزشمنده و نیاز نیست ذهنتونو خسته کنین!

مصّحح شو

(صفحه ۱۰)

طول نقطه دو برابر شده، (0.25) پس $b = \frac{1}{4}$ (0.25)

عرض نقطه نصف شده، (0.25) پس $a = \frac{1}{4}$ (0.25)

بررسی دقیق‌تر:











برای آن که a و b را پیدا کنیم، باید بررسی کنیم چه تغییری روی طول و عرض A اعمال شده. با مقایسه A و A' ، طول

A دو برابر شده که یعنی $b = \frac{1}{4}$ و عرض آن نیز نصف شده که یعنی $a = \frac{1}{4}$.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

نقشه نهایی:

مسیر عکسش رو هم بلد باشین دیگه! یعنی اگر A' و a و b رو داد، می‌تونین A رو پیدا کنین؟

<p>۱/۵</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۱۸)</p> <p>در بازه های $(-\infty, 0)$ و $[0, 1]$ نزولی و در بازه $[1, +\infty)$ صعودی است. (0.25) (0.25) (0.25)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه </p>	<p>۶</p>
<p>۱</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۲۲)</p> <p>$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $g(-1) = 0 \Rightarrow f(-3) = 0 \Rightarrow -27 + 9m + 6 + 3 = 0 \Rightarrow m = 2$ (0.25) (0.25) (0.25) (0.25)</p> <p>بررسی دقیق تر: </p> <p>اگر قرار است $g(x)$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد، باید $g(-1) = 0$، در نتیجه: $g(-1) = f(-3) = -27 + 9m + 6 + 3 = 9m - 18 = 0 \Rightarrow m = 2$</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p> <p>تقسیم چندجمله ای بر دوجمله ای درجه اول </p> <p>در تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر دوجمله ای درجه اول $(ax + b)$، باقی مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است. نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax + b)$ بخش پذیر است.</p> <p>یه نمونه باحال </p> <p>چندجمله ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دوجمله ای $(x + 1)$ بخش پذیر است چرا که $f(-1) = 0$ است.</p> <p>مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	<p>۷</p>
<p>۱</p>	<p>مصّحّ شو  (صفحه ۲۲)</p> <p>$x - a = 0 \Rightarrow x = a$ $f(a) = 0 \Rightarrow a^5 - 32 = 0 \Rightarrow a = 2$ (0.25) (0.25)</p> <p>$x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ (0.25) (0.25)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه </p>	<p>۸</p>

چند جمله ای ها

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می توان نتیجه گرفت که:

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

♦ اگر n فرد باشد:

♦ اگر n زوج باشد:

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

به نمونه باحال

هر یک از چند جمله ای های زیر را بر حسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^6 - 1$ با عامل $(x + 1)$:

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

ب) $x^6 - 1$ با عامل $(x - 1)$:

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

به نمونه باحال

چند جمله ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید.

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

مصطح شو

(صفحه ۲۷)

$$T = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow |a| = \frac{4}{3} \quad (0.25)$$

$$\begin{cases} \max = 3 + |a| = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \quad (0.25) \\ \min = 3 - |a| = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \quad (0.25) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

توابع مثلثاتی:

در توابع مثلثاتی $y = a \cos(bx + d) + c$ و $y = a \sin(bx + d) + c$ داریم:

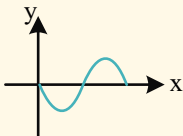
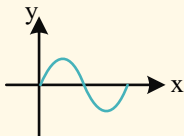
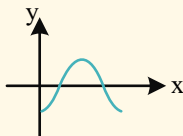
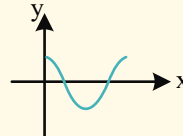
$$\begin{cases} \max = |a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب sin یا cos} : \text{ بیشترین مقدار} \\ \min = -|a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب sin یا cos} : \text{ کمترین مقدار} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$:

$y = a \sin bx$		$y = a \cos bx$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$
			

مصّحح شو 


$$\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \quad (0.25)$$

۱/۲۵

$$\begin{cases} \max = 1 = c + |a| \\ \min = -2 = c - |a| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \quad (0.25) \\ |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2} \quad (0.25) \end{cases}$$

(صفحه ۳۳)

۱۰

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 


مصّحح شو 

(صفحه ۳۱)

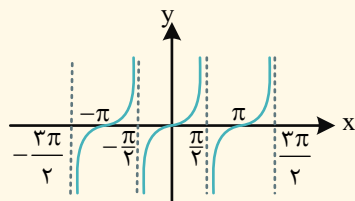
در بازه داده شده تابع $y = \tan x$ اکیداً صعودی است. (۰.۲۵)

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \Rightarrow -1 < \tan \alpha < 0 \Rightarrow -1 < 2m + 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

(۰.۲۵) (۰.۲۵) (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 

تابع $\tan x$ 



دامنه تابع $y = \tan x$ به صورت $\mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$ یا $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$ است. ($k \in \mathbb{Z}$)

دوره تناوب تابع $y = \tan x$ به صورت $T = \pi$ است.

تابع $y = \tan x$ در هر بازه به صورت $\left((2k-1)\frac{\pi}{4}, (2k+1)\frac{\pi}{4} \right)$ اکیداً صعودی است.

۱

۱۱


مصطح شو 
(صفحه ۲۳)

۱/۵

$$\tan \alpha = \frac{1}{5} \quad (0.25)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \quad (0.25)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{1+BD}{5} = \frac{5}{12} = \frac{1+BD}{5} \Rightarrow BD = \frac{13}{12} \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 


مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۹ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

۱۲

مصطح شو 
(صفحه ۴۴)

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = x + 2k\pi \quad (0.25) \\ 3x = -x + 2k\pi \quad (0.25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \quad (0.25) \\ x = \frac{k\pi}{2} \quad (0.25) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 

حالا نوبت به معادلات مثلثاتی رسید... 

۱) معادلات مثلثاتی به فرم $\sin f(x) = \sin g(x)$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

حالت های خاص معادلات سینوسی:

معادله	جواب کلی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۲) معادلات مثلثاتی به فرم $\cos f(x) = \cos g(x)$

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

۱/۲۵

۱۳

حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$

مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو 

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (صفحه ۵۵) (۰.۲۵)

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (صفحه ۵۳) (۰.۲۵)

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$ (صفحه ۶۵) (۰.۲۵)

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (صفحه ۶۹) (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح 

وقتی به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم. چند مثال ببینید:

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{|3 - 3|} = \frac{2}{0} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{|3x + 1|} = \frac{[-\frac{1}{3}]}{|3(-\frac{1}{3}) + 1|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

۱- حد نامتناهی

نکته: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی

($+\infty$ یا $-\infty$) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+ عدد}{+} = +\infty$	$\frac{- عدد}{-} = +\infty$	$\frac{+ عدد}{-} = -\infty$	$\frac{- عدد}{+} = -\infty$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

۲- محاسبه حد توابع کسری در بی نهایت

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند که در این صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیش تر است.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کم تر باشد.	صفر

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۱۰ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

نقشه نهایی:

خوب بارمبندی ها رو نگاه کنین! هر مرحله استفاده از هم آرزوی و ساده سازی بارم داره!

مصطح شو

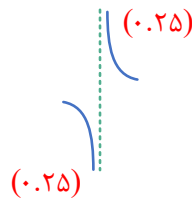
$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \quad (۰.۲۵)$$

(صفحه ۵۷)

خط $x=1$ مجانب قائم است، زیرا: (۰.۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \quad (۰.۲۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty \quad (۰.۲۵)$$

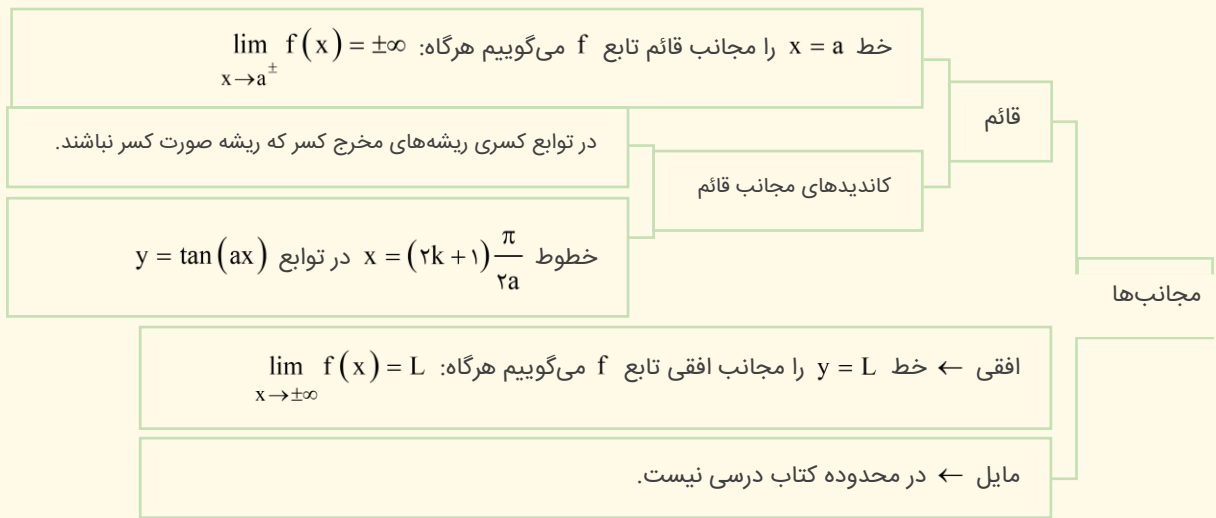


سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

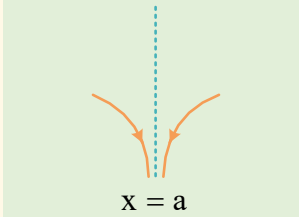
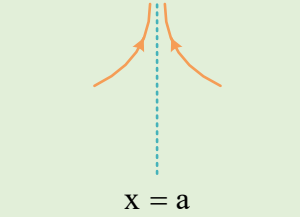
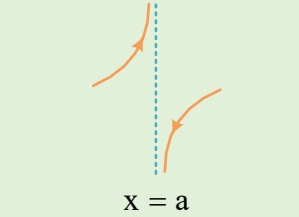
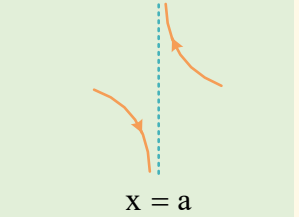
۱/۵

حالا مجانب ها رو خوب یاد بگیرید...

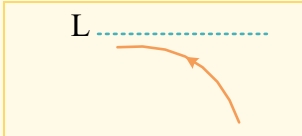
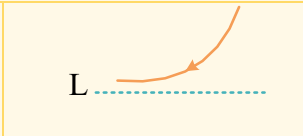
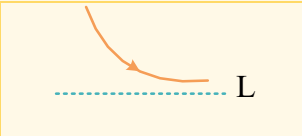
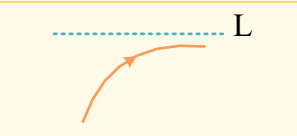
۱۵



رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم 

			
$x = a$	$x = a$	$x = a$	$x = a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی 

			
L	L	L	L
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$

مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۳ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو 

(صفحه ۵۸)

در $x = 2$ مخرج ریشه مضاعف دارد. (۰.۲۵)

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (۰.۲۵)} \\ b = -4 \text{ (۰.۲۵)} \end{cases}$$

بررسی دقیق‌تر: 




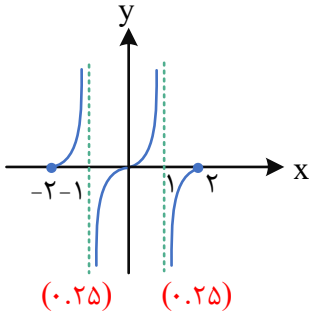

از آن‌جا که حاصل حد $+\infty$ شده، یعنی صفر مخرج طوری بوده که $x \rightarrow 2^+$ یا $x \rightarrow 2^-$ فرقی نکنه! این اتفاق موقعی میفته

که عامل مضاعف داشته باشیم، حال چون ضریب x^2 در مخرج a است، پس مخرج $a(x-2)^2$ بوده است.

$$a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a = ax^2 + bx + c$$

بنابراین: $a = 1$ و $b = -4$.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

۱	<p style="text-align: right;">مصّحّ شو  (صفحه ۶۹)</p> <p>$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ مجانب قائم (۰.۲۵)</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 1}{2x - 4} = 3 \Rightarrow y = 3$ مجانب افقی (۰.۲۵)</p> <p>(۰.۲۵)</p> <p style="text-align: right;">نقطه $A(2, 3)$ نقطه برخورد مجانب‌هاست. (۰.۲۵)</p> <p style="text-align: center;">مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۱۱ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	۱۷
۰/۱۵	<p style="text-align: right;">مصّحّ شو  (صفحه ۵۸)</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">(۰.۲۵) (۰.۲۵)</p> <p style="text-align: center;">راهنمای مصحح </p> <p>دقت کنید جواب منحصر به فرد نیست و نمودارهای دیگری نیز، قابل رسم است.</p>	۱۸
۲۰	موفق باشید.	